

文章编号: 1000-8055(2009)11-2618-07

航空弧齿锥齿轮承载传动误差的分析与设计

曹雪梅¹, 张 华¹, 方宗德²

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 洛阳 471003;

2. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 在计算时变啮合刚度的基础上, 推导了承载传动误差简化计算公式, 并与有限元计算方法进行了比较, 表明两种计算方法得到的承载传动误差的幅值、形状及一阶频谱幅值随重合度的变化趋势基本一致。根据承载传动误差简化公式定性的分析了负载扭矩与实际重合度的关系、承载传动误差的变化规律、齿面印痕和几何传动误差对承载传动误差的影响。最后根据分析结果, 提出基于承载传动误差的齿面优化设计的优化策略, 优化变量为接触迹线的角度、几何传动误差的幅值, 优化目标为承载传动误差在较宽的负载范围内波动最小。

关 键 词: 弧齿锥齿轮; 时变啮合刚度; 承载传动误差; 接触迹线

中图分类号: V232. 8

文献标识码: A

Design and analysis of loaded transmission errors for aviation spiral bevel gears

CAO Xue-mei¹, ZHANG Hua¹, FANG Zong-de²

(1. School of Mechanical and Electromechanical Engineering,
Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China;

(2. School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Loaded tooth contact analysis is an important technique for analyzing the meshing performances under load. The known algorithms can't be concerned with the tooth surface design directly because of a great deal of calculation, iteration or equations. A new simplified formulation was thus proposed based on application of the time varying stiffness. The transmission errors under loads were calculated by the developed formulation and finite element method, respectively. The results for the two methods were compared with respect to the magnitude, shape and 1st component of frequency spectrum of loaded transmission errors, and showed good agreement. The developed formulation was used to study the relationship of real contact ratio and load, the law of the loaded transmission errors versus real contact ratio, and the effect of contact pattern, transmission errors on loaded transmission errors. The analysis results provide the theoretical bases for the optimization strategy to tooth surface design of spiral bevel gear. The calculation of the loaded transmission errors is embedded to constitute the design route in the courses of the optimization. The design variables include contact path orientation and magnitude of transmission error; the objective of optimization is that the magnitude of the loaded transmission error fluctuates less under wide load ranges.

Key words: spiral bevel gears; time-varying mesh stiffness; loaded transmission errors; contact pattern

收稿日期: 2008-12-14; **修订日期:** 2009-01-15

基金项目: 航空科技创新基金(07B53004)

作者简介: 曹雪梅(1970 -), 女, 浙江桐乡人, 讲师, 博士, 主要从事锥齿轮设计与检测技术研究。

轮齿承载接触分析(L TCA)是对轮齿承载啮合过程进行数值仿真的一种重要分析方法,通过承载传动误差计算、载荷分配及应力分布反映齿轮承载啮合性能.有限元法^[1-6]需要有限元网格的划分、有限元方程的求解,计算工作量较大;此外齿面离散为点,承载传动误差的计算无法用数学公式表达.利用近似公式^[7-8]计算轮齿承载变形,要通过解方程或迭代计算承载传动误差,无法体现设计变量对计算结果的影响.轮齿承载接触分析作为齿面设计评价的一种方法,目前无法直接参与到齿面设计中.

本文利用近似公式计算了轮齿啮合的时变啮合刚度;基于时变啮合刚度,推导了轮齿承载接触分析简化计算公式,简化了承载传动误差的计算过程;在运算中无需解方程和迭代计算.根据简化计算公式分析了几何传动误差、齿面印痕、承载量和承载传动误差的关系,总结了承载传动误差的变化规律,制定了基于承载传动误差的齿面优化设计的优化策略,采用齿面主动设计方法^[7-8],将承载传动误差的计算直接嵌入到齿面设计中,使得弧齿锥齿轮在较宽的负载范围内具有良好的传动特性.

1 时变啮合刚度

1.1 轮齿刚度的时变性

轮齿刚度的定义为使一对或几对同时啮合的齿轮在单位齿宽上产生单位挠度施加的载荷.

轮齿的刚度具有时变性,一方面随着单齿和双齿啮合的交替进行,轮齿的啮合刚度会随时间周期性变化,且在不同的啮合位置,每一对啮合轮齿的啮合刚度也不相同;另一方面随着载荷的增大,瞬时接触椭圆长轴增大,单齿啮合刚度提高;同时随着载荷的增加,轮齿变形增加,重合度增大,同时参与啮合的齿对增多,综合啮合刚度增加.

1.2 单齿对啮合刚度 K_p

轮齿在外载荷作用下产生的弹性变形主要包括接触变形和弯曲变形^[12].利用 Westinghouse 悬臂梁计算公式计算弯曲刚度 K_w ,赫兹公式计算接触刚度 K_H .利用公式(1)计算单齿对啮合刚度 K_p .

$$\frac{1}{K_p} = \frac{1}{K_H} + \frac{1}{K_w} \quad (1)$$

分别在 $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ 和 $150 \text{ N} \cdot \text{m}$ 载荷作用下轮

齿单齿对啮合刚度如图 1 所示,从图中可以看出,啮合刚度随着载荷的增大而增大,呈非线性.单齿对啮合刚度近似为对称的抛物线型.对称度与设计参考点的选择有关.

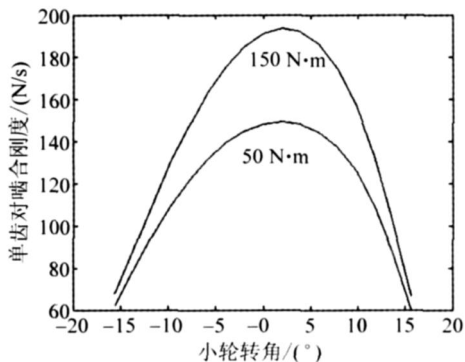


图 1 单齿对啮合刚度图

Fig 1 Mesh stiffness for single tooth

2 承载传动误差的简化计算

2.1 轮齿间载荷分配

在扭矩 M 作用下,设计参考点的单齿对啮合刚度为 K_0 .齿对 $1, 2, \dots, m$ 同时参与啮合,齿对 i 的几何传动误差为 $\delta\phi_i$,分担的扭矩为 M_i ,承载变形引起的传动误差 ϕ_i ,单齿对啮合刚度为 K_i .

轮齿在扭矩作用下可能会有两齿或三齿同时啮合,即由二齿或三齿同时承担齿轮所受载荷,则有载荷平衡条件 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_m$.另一方面,同时啮合齿的运动情况是一致的,即同时啮合的齿对承载传动误差 E_{Li} 是相等的,则有传动角位移协调条件 $E_{L1} = E_{L2} = \dots = E_{Lm}$.其中 $E_{Li} = \delta\phi_i + \phi_i$.

以三齿啮合为例,由载荷平衡条件和传动角位移协调条件可得

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{K_1 + K_2 + K_3} [K_0 \phi_0 + K_2 (\delta\phi_2 - \delta\phi_1) + K_3 (\delta\phi_3 - \delta\phi_1)] \\ M_2 &= \frac{1}{K_1 + K_2 + K_3} [K_0 \phi_0 + K_1 (\delta\phi_1 - \delta\phi_2) + K_3 (\delta\phi_3 - \delta\phi_2)] \\ M_3 &= \frac{1}{K_1 + K_2 + K_3} [K_0 \phi_0 + K_1 (\delta\phi_1 - \delta\phi_3) + K_2 (\delta\phi_2 - \delta\phi_3)] \end{aligned} \quad (2)$$

若计算的 $M_i \leq 0$,则该齿对不参与啮合,重新进行载荷分配的计算,确定承受载荷的齿对.

2.2 计算承载传动误差

在单齿、双齿、三齿啮合条件下承载传动误差表达式如下:

$$E_L = \frac{K_0 \phi_0 + K_1 \delta \phi_1}{K_1} \tag{3}$$

$$E_L = \frac{K_0 \phi_0 + K_1 \delta \phi_1 + K_2 \delta \phi_2}{K_1 + K_2} \tag{4}$$

$$E_L = \frac{K_0 \phi_0 + K_1 \delta \phi_1 + K_2 \delta \phi_2 + K_3 \delta \phi_3}{K_1 + K_2 + K_3} \tag{5}$$

2.3 算例比较

分别用基于时变刚度的简化计算公式(计算流程如图 2 所示)和有限元方法计算一对弧齿锥齿轮的承载传动误差,计算结果如图 3(a),(b)所

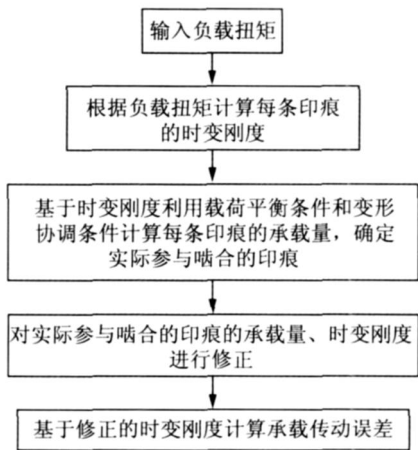


图 2 L TCA 计算流程图
Fig. 2 Flow chart for L TCA

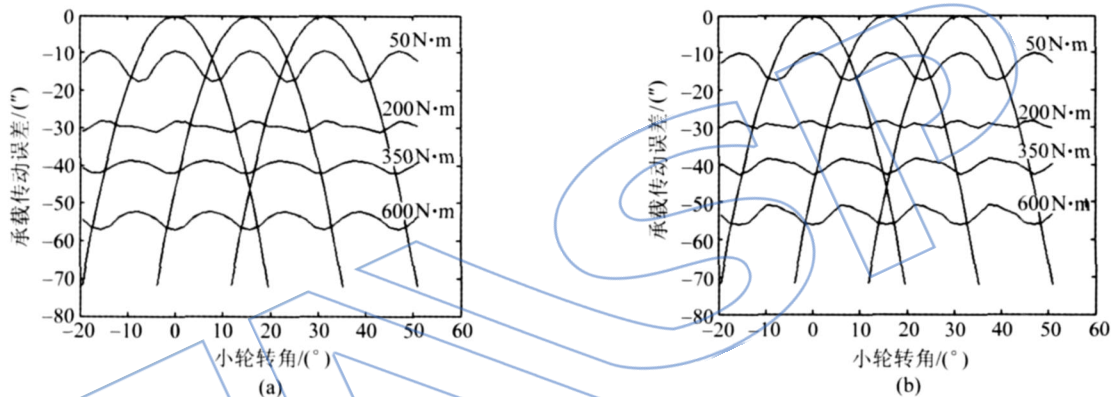


图 3 承载传动误差曲线
Fig. 3 Loaded transmission errors

示.对比两图可以看出,在不同载荷作用下,承载传动误差的幅值、形状及变化规律基本一致.

对两种方法计算的承载传动误差进行频谱分析,一阶频谱随重合度的变化如图 4 所示.承载传动误差一阶频谱幅值随重合度的变化趋势是一致的.因此基于时变刚度的简化计算公式可以用于

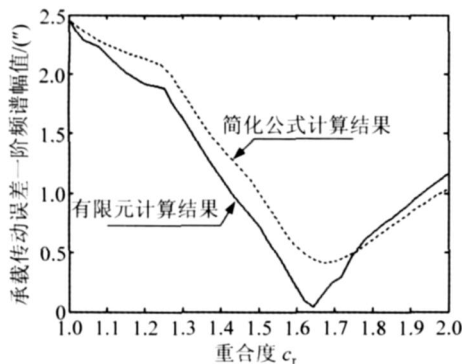


图 4 两种方法一阶频谱比较
Fig. 4 First component of frequency spectrum of loaded transmission errors

分析承载传动误差的变化规律.

3 承载传动误差的分析

3.1 实际重合度小于 2 时承载传动误差函数表达式

承载传动误差是周期函数,啮合周期为 T .图 5 所示,对于齿对 II 来说,在载荷作用下,实际重合度为 c_r ,啮合范围从 6 点到 3 点,小轮转角为 $c_r T$,啮合范围 4-0-1 是单齿啮合区;在双齿啮合区 1-2-3 和 4-5-6 中,齿对 II 分别和齿对 III、齿对 I 同时啮合.在齿对 II 的啮合周期 T 内,5 点是开始点,2 点是终止点;0 点为设计参考点,其几何传动误差为 0;1 点和 4 点是单齿和双齿的啮合转换点;齿面设计时,几何传动误差设计为对称的抛物线形;单齿对啮合的时变啮合刚度为近似对称抛物线形,因此仅分析齿对 II 啮合周期内 0-1-2 啮合区间.

承载传动误差函数的表达式为

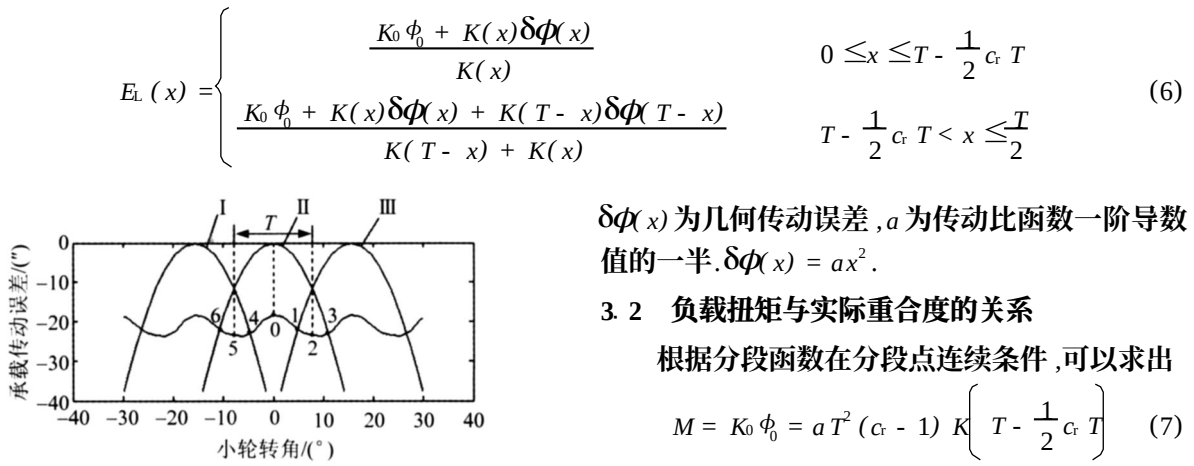


图 5 承载传动误差示意图
Fig. 5 Sketch for L TCA

承载传动误差函数为分段函数,分段点为单齿和双齿的啮合转换点 1,式(6)中 x 为小轮转角, $K(x)$ 为在扭矩 M 作用下的时变啮合刚度, K_0 为设计参考点在扭矩 M 作用下的啮合刚度, ϕ_0 为设计参考点在扭矩 M 作用下的角位移。

$$E_L(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{aT^2(c_r - 1)K\left[T - \frac{1}{2}c_r T\right]}{K(x)} & 0 \leq x \leq T - \frac{1}{2}c_r T \\ \frac{aT^2(c_r - 1)K\left[T - \frac{1}{2}c_r T\right] + K(x)ax^2 + K(x-T)a(x-T)^2}{K(x-T) + K(x)} & T - \frac{1}{2}c_r T < x \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (8)$$

3.3.1 单齿啮合区的承载传动误差变化规律

定义 f_0, f_1 分别为在 0 点, 1 点处的承载传动误差;定义函数 $f_{01}(c_r) = f_0 - f_1$ 为单齿啮合区的相对幅值变化函数。

$$f_{01}(c_r) = aT^2 \left[(c_r - 1) \frac{K\left[T - \frac{1}{2}c_r T\right]}{K_0} - \frac{1}{4}c_r^2 \right] \quad (9)$$

对式(9)分析可知,当实际重合度位于 $1 \leq c_r \leq 2$ 范围内,在单齿啮合区内,随着载荷增加,重合度 c_r 增大,承载传动误差的相对幅值波动量逐渐减少,当 $c_r = 2$ 时,相对幅值波动量为 0. 函数 $f_{01}(c_r)$ 随实际重合度的变化曲线,与有限元法计算的变化趋势一致。

3.3.2 双齿啮合区的承载传动误差变化规律

定义 f_2 为 2 点处的承载传动误差, 定义 $f_{21}(c_r) = f_2 - f_1$ 为双齿啮合区相对幅值变化函数。

$\delta \phi(x)$ 为几何传动误差, a 为传动比函数一阶导数值的一半, $\delta \phi(x) = ax^2$ 。

3.2 负载扭矩与实际重合度的关系

根据分段函数在分段点连续条件,可以求出

$$M = K_0 \phi_0 = aT^2(c_r - 1)K\left[T - \frac{1}{2}c_r T\right] \quad (7)$$

实际重合度 c_r 不变时,负载扭矩 M 与几何传动误差的幅值(由系数 a 确定)成正比. 当传动误差的幅值不变时,实际重合度随着载荷增加而增大。

3.3 承载传动误差的变化规律

将式(7)代入式(6),则承载传动误差函数的表达式为

$$f_{21}(c_r) = aT^2(c_r - 1) \left[\frac{K\left[T - \frac{1}{2}c_r T\right]}{K\left[\frac{T}{2}\right] + K\left[-\frac{T}{2}\right]} - \frac{c_r + 1}{4} \right] \quad (10)$$

$K(x)$ 用二次函数近似代替, $K(x) = K_0 - bx^2$, 其中 $b > 0$ 。

$c_r' = 3.5 - 2 \frac{K_0}{bT^2}$ 是分界点,当 $c_r' < c_r < 2$ 时,且随着实际重合度 c_r 的增大,承载传动误差的波动增大, $c_r = 2$ 时达到最大。

$f_{21}(c_r)$ 随实际重合度的变化曲线,与有限元法计算的变化趋势一致。

3.4 接触迹线方向、几何传动误差对承载传动误差的影响

3.4.1 接触迹线方向对承载传动误差的影响

保持其他设计参数不变,接触迹线与根锥夹角分别为 $10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ 时,载荷为 $120 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时单

齿对啮合刚度如图6所示.单齿对啮合刚度曲线呈抛物线形,接触迹线设计角度较小时,刚度值较大,且曲线变化较平缓.

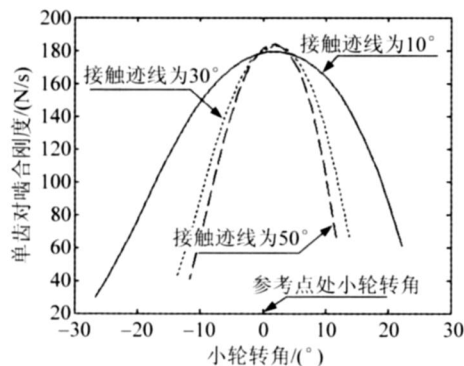


图6 单齿对啮合刚度

Fig. 6 Mesh stiffness for single tooth

在单齿啮合区,由式(9)可知,随着接触迹线的设计角度增大,波动增加.

在双齿啮合区,承载传动误差幅值波动函数式(10)可知,重合度有个分界值 c_r' ,随着接触迹线的设计角度增大,当 $1 < c_r < c_r'$ 时,波动增加;当 $c_r' < c_r < 2$ 时,波动减小.

当负载较小时,实际重合度较小,单齿啮合区的波动对整个啮合周期的影响较大,随着接触迹线的设计角度增大,承载传动误差的波动较大.

当负载较大时,实际重合度增大,双齿啮合区的波动对整个啮合周期的影响较大,随着接触迹线的设计角度增大,承载传动误差的波动较小.

图7为三种接触迹线方向对应的承载传动误差一阶频谱幅值对比图.

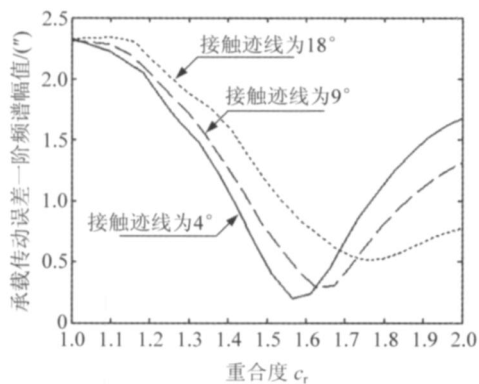


图7 承载传动误差一阶频谱

Fig. 7 First component of frequency spectrum of loaded transmission errors

3.4.2 几何传动误差幅值对承载传动误差的影响

接触刚度的变化主要受载荷变化的影响;弯曲刚度的变化主要受位置变化的影响.可近似认为,几何传动误差幅值的改变不影响单齿对啮合刚度.

从式(8)可以看出,在相同的重合度下,承载传动误差的幅值仅与传动比函数一阶导数值成正比.在其他设计条件不变的情况下,随着几何传动误差幅值的增大,承载传动误差的幅值也相应增大.

图8为几何传动误差在啮合转换点处的幅值分别为 $10.665''$, $21.329''$, 对应的承载传动误差一阶频谱幅值对比图.

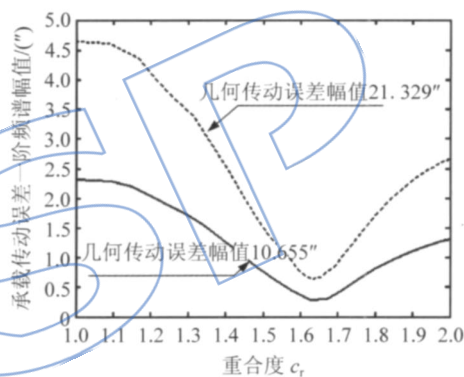


图8 承载传动误差一阶频谱

Fig. 8 First component of frequency spectrum of loaded transmission errors

综合分析可以看出,几何传动误差幅值小,承载传动误差的波动也小,但承载能力弱,载荷大时易发生边缘接触;几何传动误差幅值大,承载传动误差的波动也大,但承载能力较强.因此设计时应根据额定负载进行设计.

4 基于承载传动误差的齿面优化设计

4.1 优化策略

考虑到实际工况下,负载在额定载荷及其邻域附近变化,因此齿面的设计目标定为在额定载荷及其邻域范围内,承载传动误差的波动最小,即保证承载传动误差在一定的负载范围内具有较好的传动性能.优化变量为接触迹线与根锥的夹角、几何传动误差的幅值.

建立承载传动误差波动评价函数

$$E_f = f_{01}(c_r)^2 + f_{21}(c_r)^2 \quad (11)$$

4.2 接触迹线的设计

若刚度函数为常数,重合度 c_r 为 1.5,承载传动误差波动评价函数达到最小值,即承载传动误差波动最小.因此,在额定负载作用下,实际重合度应大于 1.5.

从前面的分析可以看出:接触迹线角度大的设计,重合度大于 1.5 时,随着重合度的增加,承载传动误差的波动较小且变化平稳.因此应增大接触迹线角度,但接触迹线角度的增大,接触迹线长度减小,设计重合度会相应降低.因此,在保证设计重合度大于 2.2 的条件下,增大接触迹线与根锥夹角.在接触迹线的设计中,优化变量是接触迹线与根锥的夹角,约束函数为设计重合度大于 2.2,目标函数为接触迹线与根锥的夹角最大.

4.3 几何传动误差的设计

几何传动误差幅值大小与承载能力密切相关,重合度相同,几何传动误差幅值大,承载量大.优化几何传动误差幅值,使得额定负载作用下承载传动误差波动最小.几何传动误差的幅值是由传动比函数的一阶导数值决定的,因此优化变量定为传动比函数的一阶导数值,目标函数为额定载荷下承载传动误差波动评价函数值最小.

采用齿面主动设计^[7-8],接触迹线的设计和几何传动误差的设计相互独立,接触迹线的设计和几何传动误差的设计分开进行,减少优化难度.

4.4 算 例

一对航空弧齿锥齿轮,轮坯参数:小轮齿数 23,大轮齿数 86,模数 4.25,压力角 20° ,螺旋角 25° ,小轮左旋大轮右旋,轴交角 $51^\circ 9'$,小轮根锥角 $9^\circ 45'$,大轮根锥角 $40^\circ 12'$,外锥距 278.35 mm,齿宽 43 mm,小轮齿顶高 4.89 mm,齿根高 2.91 mm,大轮齿顶高 2.11 mm,齿根高 5.69 mm,顶隙 0.8 mm.工作面额定载荷为 $200\text{ N}\cdot\text{m}$.

根据额定载荷的大小对工作面齿面进行优化设计,使得在额定载荷及其一定的邻域范围内,承载传动误差的波动最小.

优化结果为:工作面接触迹线与根锥的夹角为 18° ,传动比函数的一阶导数值 m'_{21} 为 0.0045,计算得到的几何传动误差幅值 $\delta\phi_r$ 为 $8.65''$.分别计算负载为 100,150,200,250,300 $\text{N}\cdot\text{m}$ 时工作面承载传动误差.分别用简化公式和有限元计算承载传动误差.用简化公式和有限元计算计算的承载传动误差分别见图 9 (a),图 9 (b).承载传动误差一阶频谱幅值见表 1.

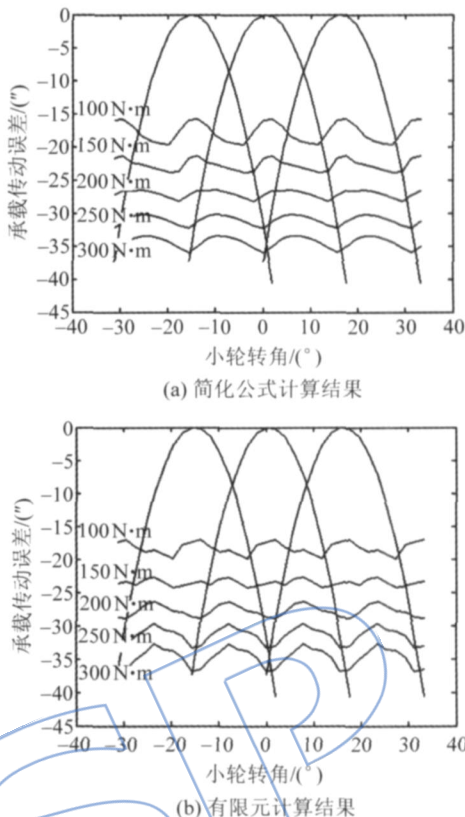


图 9 额定载荷为 $200\text{ N}\cdot\text{m}$ 承载传动误差
Fig. 9 Loaded transmission errors

表 1 承载传动误差一阶频谱幅值

Table 1 First component of frequency spectrum of loaded transmission errors

负载/ ($\text{N}\cdot\text{m}$)	简化公式计算一阶 频谱幅值/($''$)	有限元计算的一阶 频谱幅值/($''$)
100	0.9883	0.5425
150	0.5171	0.2458
200	0.3622	0.5562
250	0.5080	0.7926
300	0.6016	0.9139

从表 1 中看出,用简化公式计算的承载传动误差,其一阶频谱幅值在额定载荷 $200\text{ N}\cdot\text{m}$ 最小,当载荷在 $150\sim 250\text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内变化时,承载传动误差的一阶频谱幅值变化很小.当载荷在 $100\sim 300\text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内变化时,承载传动误差的一阶频谱幅值最大值小于 1.0.用有限元方法计算的承载传动误差一阶频谱幅值在载荷为 $150\text{ N}\cdot\text{m}$ 时最小,当载荷在 $100\sim 200\text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内变化时,承载传动误差的一阶频谱幅值变化很小.当载荷在 $100\sim 300\text{ N}\cdot\text{m}$ 范围内变化时,承载传动误差的一阶频谱幅值最大值小于 1.0.

综合分析可以看出,优化后的齿面,承载传动误差无论是简化公式还是有限元计算,当载荷在额定载荷邻域附近变动时,承载传动误差一阶频谱的幅值都较小,且波动较为平稳.当负载在较大范围内变动时,承载传动误差一阶频谱的幅值小于1.0.两种计算方法还是有一定的差异,从承载传动误差一阶频谱最小值对应的载荷来看,有限元的计算结果要小于简化公式的计算结果.

5 结 论

1) 本文提出了基于时变啮合刚度的承载传动误差简化计算方法,和有限元法相比,两种计算方法得到的承载传动误差基本一致.该方法不需解方程和反复迭代,计算简单,可嵌入到齿面设计中.

2) 接触迹线的设计角度较大时,轮齿时变啮合刚度较大,刚度曲线变化平稳.当重合度较大时,承载传动误差的波动较小,且随着重合度的增加,变化平稳.但设计角度增大,接触迹线长度减小,设计重合度会相应降低.

3) 几何传动误差幅值小,承载传动误差的波动也小,但承载能力弱,当载荷增大时易发生边缘接触;几何传动误差幅值大,承载传动误差的波动也大,但承载能力较强.因此设计时应根据额定负载进行设计.

4) 建立了基于承载传动误差的齿面优化设计模型.优化目标为较宽的负载范围内承载传动误差的波动最小.选取接触迹线的角度、传动比函数的一阶导数值做为优化变量.接触迹线的优化目标为满足设计重合度的条件下,接触迹线与根锥的夹角最大.几何传动误差的优化目标为额定载荷下承载传动误差波动评价函数的值最小.

参考文献:

- [1] Litvin F L. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1996, 118(4): 561-567.
- [2] Singh R, Song H, Gunda R. Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3): 927-949.
- [3] Jean P, Guingand M, Remond D. Numerical and experimental study of the loaded transmission error of a spiral bevel gear[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(2): 195-200.
- [4] Bibel G D, Kumar A, Reddy S, et al. Contact stress analysis of spiral bevel gears using finite element analysis[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117: 235-240.
- [5] Argyris J, Fuentes A. Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002, 191: 1057-1095.
- [6] Litvin F L, Fuentes A, Hayasaka K. Design, manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(1): 83-118.
- [7] 曹雪梅,方宗德,张金良. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计[J]. 机械工程学报, 2007, 43(8): 155-158.
CAO Xuemei, FANG Zongde, ZHANG Jinliang. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(8): 155-158. (in Chinese)
- [8] 曹雪梅,方宗德,许浩. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计及试验验证[J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 209-214.
CAO Xuemei, FANG Zongde, XU Hao. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears and experimental tests[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7): 209-214. (in Chinese)